INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SATU MARE

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 14. II. 2026
Clasa a VIII-a

Problema 1.

Se consideră expresia $E(x) = \frac{2x^3-x^2+x+1}{2x^3-3x^2+3x-1}, x \in Z$

a) Simplificați expresia.

b) Determinați $x \in Z$ pentru care $E(x) \in Z$.

Problema 2.

a) Demonstrați că $a^4 - 2a^3 + 2a^2 + 1 = a + b$ este echivalent cu $(a-1)^2 \cdot (a^2+1) = b - a$, oricare ar fi numerele reale a și b.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul: $\begin{cases} x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 1 = x + y \\ y^4 - 2y^3 + 2y^2 + 1 = y + z \\ z^4 - 2z^3 + 2z^2 + 1 = z + x \end{cases}$

Problema 3.

Pe planul rombului $ABCD$ se ridică perpendiculara VD, cu lungimea egală cu latura rombului. Fie M mijlocul lui VD și N mijlocul lui VB. Dacă MN are lungimea egală cu jumătatea laturii rombului, aflați:

a) Distanța de la punctul V la dreapta BC.

b) Măsura unghiului diedru dintre planele (AMN) și (CMN).

Problema 4.

a) Se consideră un triunghi oarecare ABC cu centrul cercului circumscris notat cu O. Dacă V este un punct exterior planului triunghiului, atunci are loc echivalența:

$VA = VB = VC$ dacă și numai dacă VO perpendiculară pe planul triunghiului ABC.

b) De aceeași parte a planului triunghiului oarecare ABC se ridică perpendicularele AA', BB' și CC' de lungimi $\sqrt{a(b+c)}$, $\sqrt{b(c+a)}$, respectiv $\sqrt{c(a+b)}$, unde $BC = a$, $CA = b$ și $AB = c$. Notăm cu I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și cu r lungimea razei cercului înscris acestuia.

i) Demonstrați că are loc egalitatea: $AI^2 = r^2 + \left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2$.

ii) Demonstrați că dreapta $O'I$ este perpendiculară pe planul triunghiului $A'B'C'$, unde punctul O' este centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$.

Notă:

- Timp de lucru: 3 ore
- Toate problemele sunt obligatorii
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 22,5 puncte
- Se acordă 10 puncte din oficiu

SUCCES!