INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SATU MARE

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

CLASA a VIII-a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.

Se consideră expresia $E(x) = \frac{2x^3-x^2+x+1}{2x^3-3x^2+3x-1}, x \in Z$

a) Simplificați expresia.

b) Determinați $x \in Z$ pentru care $E(x) \in Z$.

Prof. **Anca Monica Vanț**, Școala Gimnazială „Mircea Eliade" Satu Mare

a)	$2x^3 - x^2 + x + 1 = 2x^3 - 2x^2 + x^2 + 2x - x + 1$ $= 2x(x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1) =$ $= (x^2 - x + 1)(2x + 1)$	**4 p**
	$2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 2x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x + x - 1$ $= 2x(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 1) =$ $= (x^2 - x + 1)(2x - 1)$	**4 p**
	$E(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$	**4 p**
b)	$2x - 1/2$	**4 p**
	$2x - 1 \in \{-2, -1, 1, 2\}$	**4 p**
	$x \in Z \Rightarrow x \in \{0,1\}$	**2,5 p**

Problema 2.

a) Demonstrați că $a^4 - 2a^3 + 2a^2 + 1 = a + b$ este echivalent cu $(a-1)^2 \cdot (a^2+1) = b - a$, oricare ar fi numerele reale a și b.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul: $\begin{cases} x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 1 = x + y \\ y^4 - 2y^3 + 2y^2 + 1 = y + z \\ z^4 - 2z^3 + 2z^2 + 1 = z + x \end{cases}$

Prof. **Gigel Buth**, Colegiul Național „Doamna Stanca" Satu Mare

a)	$(a-1)^2 \cdot (a^2+1) = (a^2-2a+1)(a^2+1) =$	**2 p**
	$= a^4 - 2a^3 + a^2 + a^2 - 2a + 1 = a^4 - 2a^3 + 2a^2 + 1 - 2a$	**2 p**
	Avem $(a-1)^2 \cdot (a^2+1) = b - a \Leftrightarrow a^4 - 2a^3 + 2a^2 + 1 - 2a = b - a \Leftrightarrow$	**2 p**
	$\Leftrightarrow a^4 - 2a^3 + 2a^2 + 1 = a + b$	**2 p**
b)	Sistemul dat mai poate fi scris astfel: $\begin{cases} (x-1)^2(x^2+1) = y - z \\ (y-1)^2(y^2+1) = z - y \\ (z-1)^2(z^2+1) = x - z \end{cases}$	**2 p**
	De unde rezultă că $y - x \geq 0, z - y \geq 0, x - z \geq 0$	**3 p**
	Deci $x \leq y \leq z \leq x$	**3 p**
	adică $x = y = z$	**2 p**
	Înlocuind în una din ecuații se obține $1 = x = y = z$.	**2 p**
	$S = \{(1,1,1)\}$	**2,5 p**

Problema 3.

Pe planul rombului $ABCD$ se ridică perpendiculara VD, cu lungimea egală cu latura rombului. Fie *M* mijlocul lui *VD* și *N* mijlocul lui *VB*. Dacă *MN* are lungimea egală cu jumătatea laturii rombului, aflați:

a) Distanța de la punctul *V* la dreapta *BC*.
b) Măsura unghiului diedru dintre planele (*AMN*) și (*CMN*).

Prof. **Manuela Elena Popescu**, Școala Gimnazială „Lucian Blaga” Satu Mare

a)	Notație: $AB = VD = a$. *MN* linie mijlocie în triunghiul *VDB* $\Rightarrow MN = \frac{BD}{2}$. Cum $MN = \frac{a}{2}$, se deduce că $BD = a$, deci triunghiul *DBC* este echilateral de latură a.	**3 p**
	Fie *P* piciorul perpendicularei duse din *D* pe *BC*. Din teorema celor trei perpendiculare, cu $VD \perp (ABC), DP \perp BC, P \in BC$ și BC inclusă în planul $(ABC) \Rightarrow VP \perp BC \Rightarrow$	**3 p**

	$\Rightarrow d(V, BC) = VP$	
	Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul *VDP*, $VP = \frac{a\sqrt{7}}{2}$	**3 p**
b)	Intersecția planelor (*AMN*) și (*CMN*) este *MN*. Fie *O* intersecția diagonalelor rombului. Atunci *NO* este linie mijlocie în triunghiul *VDB* , de aici, $NO \| VD$ deci $NO \perp (ABC) \Rightarrow NO \perp AO$	**2 p**
	Conform teoremei celor 3 perpendiculare, $AN \perp MN$	**2 p**
	Analog $CN \perp MN$, deci unghiul diedru este $\sphericalangle ANC$ sau suplementul acestuia.	**2 p**
	Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul *AON*, $AN = a \Rightarrow \sphericalangle ANO = 60^\circ \Rightarrow \sphericalangle ANC = 120^\circ$	**2 p**
	Unghiul diedru dintre planele (*AMN*) și (*CMN*) este de 60°	**3 p**
	Figură realizată corect	**2,5 p**

Problema 4.

a) Se consideră un triunghi oarecare *ABC* cu centrul cercului circumscris notat cu *O*. Dacă *V* este un punct exterior planului triunghiului, atunci are loc echivalența:

VA = *VB* = *VC* dacă și numai dacă *VO* perpendiculară pe planul triunghiului *ABC*.

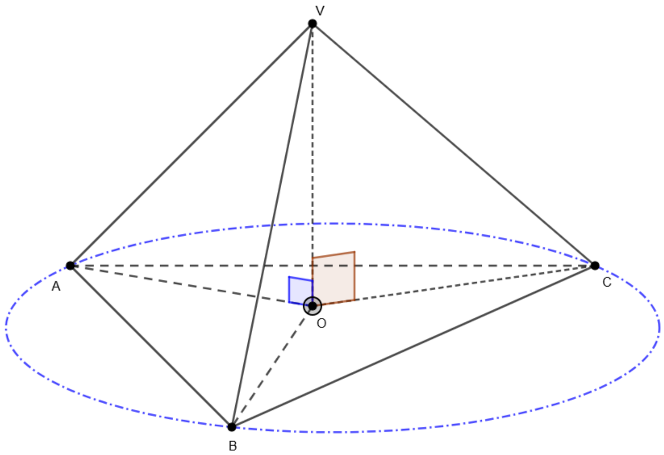
b) De aceeași parte a planului triunghiului oarecare *ABC* se ridică perpendicularele *AA'*, *BB'* și *CC'* de lungimi $\sqrt{a(b+c)}$, $\sqrt{b(c+a)}$, respectiv $\sqrt{c(a+b)}$, unde *BC* = a, *CA* = b și *AB* = c. Notăm cu *I* centrul cercului înscris în triunghiul *ABC* și cu r lungimea razei cercului înscris acestuia.

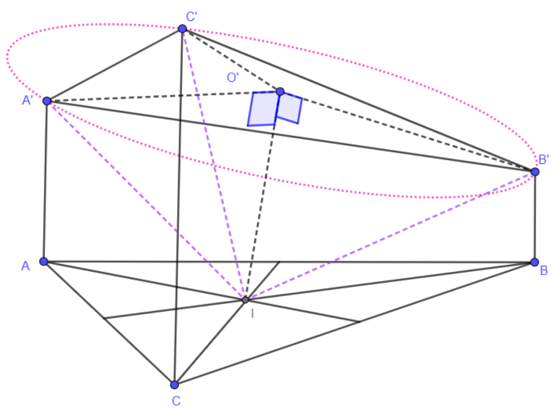
i) Demonstrați că are loc egalitatea: $AI^2 = r^2 + \left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2$.

ii) Demonstrați că dreapta *O'I* este perpendiculară pe planul triunghiului *A'B'C'*, unde punctul *O'* este centrul cercului circumscris triunghiului *A'B'C'*.

Prof. **Petru Braica**, Colegiul Național „Mihai Eminescu” Satu Mare,
Adaptare Supliment Gazeta Matematică nr. 10/2025

a)	*Implicația directă.* Fie *VX* perpendiculara dusă din *V* pe planul triunghiului *ABC*. Triunghiurile *VXA*, *VXB*, *VXC* sunt triunghiuri dreptunghice congruente în cazul I.C., *VX* este latură comună, iar muchiile laterale sunt egale, deci *XA* = *XB* = *XC*, de unde *X* = *O*	**4p**

	Implicația reciprocă. Din VO perpendiculară pe plan rezultă că triunghiurile VOA, VOB și VOC sunt congruente în cazul C.C., întrucât $OA = OB = OC$ și cateta OV este comună. De aici $VA = VB = VC$	**4p**
		**1,5 p**
b)	i) Din teorema ciocului de cioară pentru cercul înscris în triunghiului ABC, avem $BD = BF$, $CD = CE$ și $AE = AF$, unde E, F și D sunt punctele de contact ale cercului înscris cu laturile AC, AB și BC. Avem că: $a + b + c = AB + BC + AC = AE + EC + CD + DB + BF + FA = 2AE + 2CD + 2BF$	**1 p** **1 p**
	Deci $AE + CD + BF = (a + b + c) / 2 = p$, de aici $AE + BC = AE + a = p$, adică $AE = p - a$, cu p semiperimetru. Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul AEI cu unghiul E unghi drept, deci $AI^2 = AE^2 + EI^2 = r^2 + ((-a+b+c)/2)^2$	**2**
	ii) Obținem relațiile analoagele $BI^2 = r^2 +((a-b+c)/2)^2$ și $CI^2 = r^2 + ((a+b-c)/2)^2$	**2 p**
	Din AA' perpendiculară pe planul (ABC), plan ce include pe AI, deducem că AA' perpendiculară pe AI. Cu teorema lui Pitagora în triunghiul $A'AI$ având unghiul drept A avem că:	**2 p**

	$A'I^2 = AI^2 + A'A^2 <=> A'I^2 = r^2 + \frac{(-a+b+c)^2}{4} + a(b+c)$ $= r^2 + \frac{(a+b+c)^2}{4} = K$	
	Analog, $B'I^2 = C'I^2 = K$. De aici $A'I = B'I = C'I$	**2 p**
	Din punctul a) deducem că piramida cu vârful în I de bază $A'B'C'$ are muchiile laterale egale, deci are loc $IO' \perp (A'B'C')$	**2 p**
	 Figură realizată corect	**1 p**

OBS. Orice rezolvare corectă și diferită de cea din barem se va puncta corespunzător!