



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 10. II. 2024
Clasa a VII-a

Problema 1.

a) Arătați că egalitatea $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ are loc pentru orice numere reale x, y .

b) Fie $a = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 2024^2$ și $b = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 2023^2$.

Arătați că numărul $(a - b)$ este multiplu de 2025.

Problema 2.

Determinați numerele naturale a și b , știind că există un unic număr natural $n \in \mathbb{N}$ pentru care $a\sqrt{b+1} < \sqrt{n} < (a+1)\sqrt{b}$.

Problema 3.

Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $AC \cap BD = \{E\}$, $m(\sphericalangle AED) = 60^\circ$, $AC = BD = 8$ cm. Dacă O este un punct în interiorul patrulaterului, iar punctele M, N, P, Q sunt respectiv mijloacele medianelor $[OU], [OV], [OZ], [OT]$ în triunghiurile OAB, OBC, OCD și ODA , atunci:

a) Arătați că patrulaterul $MNPQ$ este romb.

b) Calculați lungimea diagonalei MP .

Problema 4.

În interiorul pătratului $ABCD$ se consideră triunghiul ABE echilateral. Se construiește pătratul $CEFM$ astfel încât punctele F și M să fie în semiplane diferite față de dreapta BC . Arătați că:

a) Triunghiul BMF este echilateral.

b) Punctele B, F, D sunt coliniare.

Notă:

- Timp de lucru 3 ore
- Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte

SUCCES!